《数学大观》

十五、刘徽的出入相补原理

主 讲 人 ： 青 课

01

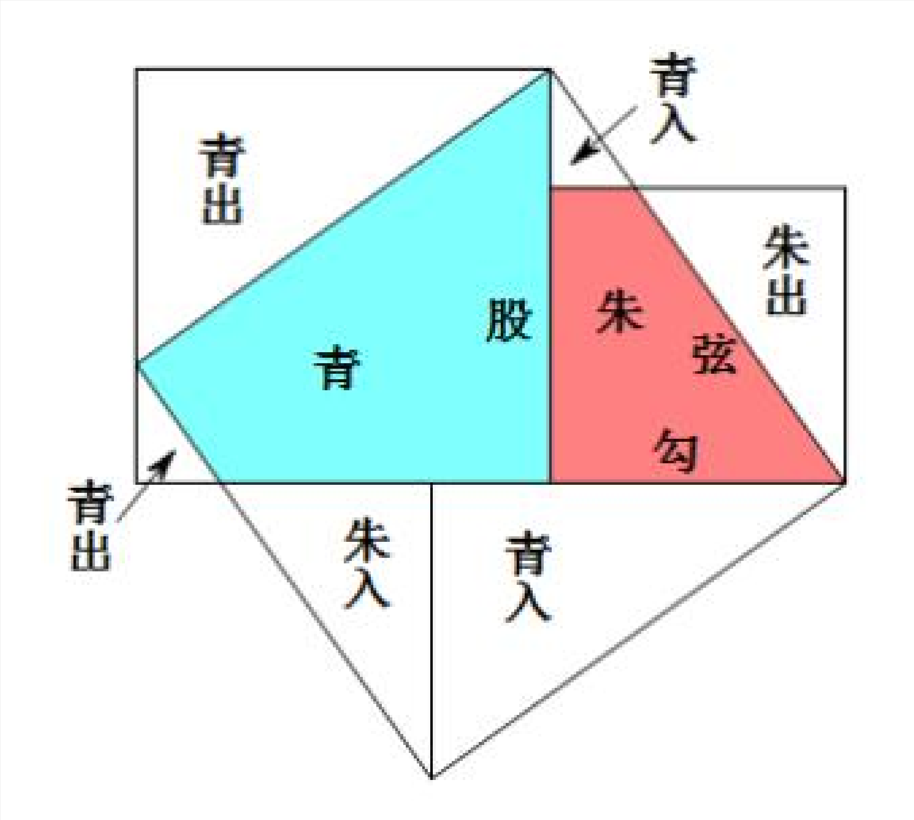
刘徽运用出入相补原理对平面图形面积的证明

“出入相补，各从其类”是我国古代构造性证明的最突出体现。

出入相补原理虽然在我国最重要的数学经典《九章算术》中没有明确提出，但这种方法被数学家们广泛应用于各种具体的直线形的平面图形面积、多面体的体积公式的证明，以及曲边形如圆、圆环等面积公式近似的证明。

刘徽在《九章算术注》中针对“勾股术”曾作了如下解释：

“勾股自乘为朱方，股自乘为青方，令出入相补，各从其类，因就其余不移动也，合成弦方之幂，开方除之，即弦也”。



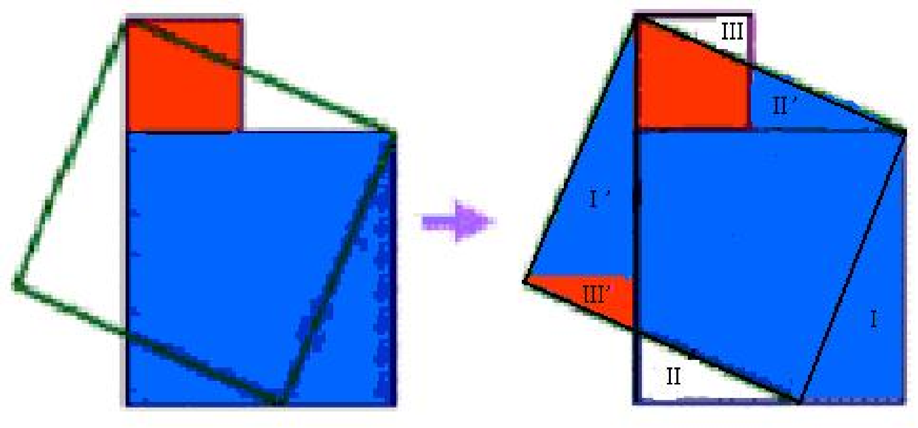
当代著名数学家吴文俊院士为此著《出入相补原理》一文专门论述，并作总结指出，所谓出入相补原理就是：

一个平面图形从一处移置他处，面积不变。又若把图形分割成若干块，那么各部分面积的和等于原来图形的面积，因而图形移置前后诸面积间的和、差有简单的相等关系。立体的情形也是这样。

“形数统一”的思想方法

例1：刘徽对勾股定理的证明。

在证明勾股定理时也是用以形证数的方法，刘徽用了“出入相补法”即对图形进行割补，分别将I→I’，II→II’，III→III’，这样就将以勾和股为边的正方形移到以弦为边的正方形的区域内，移动前后图形的面积是一样的，这样完全用图解法就解决了问题。



例2：测海岛的高

《海岛算经》第 1 题为：

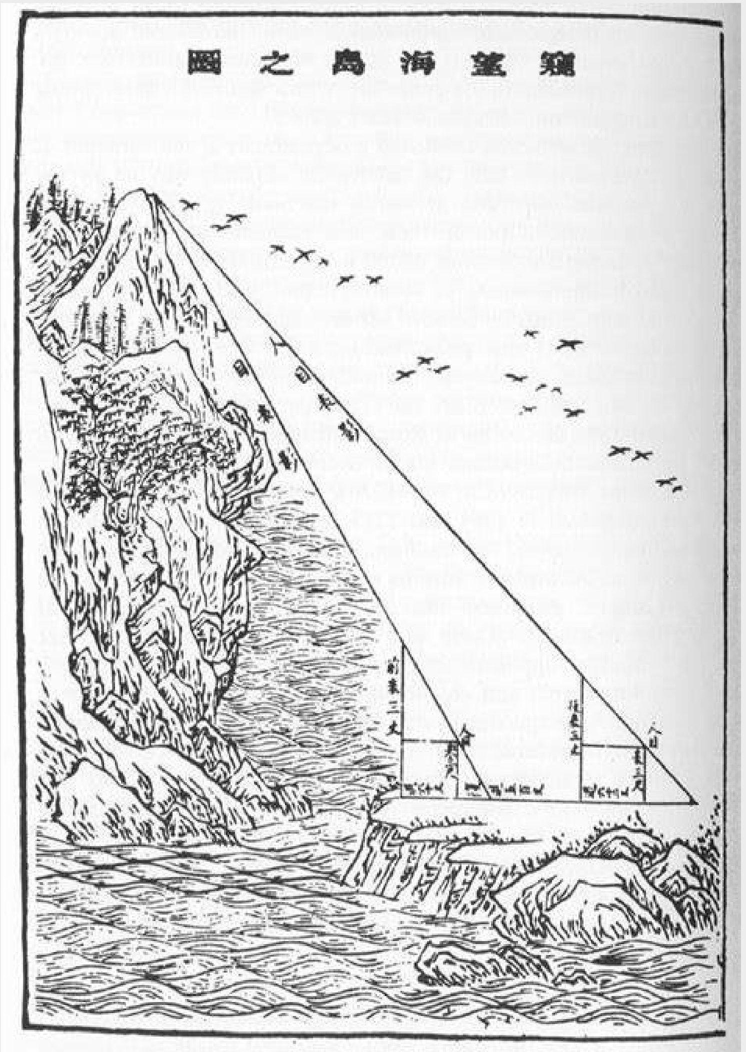
今有望海岛，立两表，齐高三丈，前后相去千步，令后表与前表参相直。从前表却行一百二十三步，人目著地取望岛峰，与表末参合。从后表却行一百二十七步，人目著地取望岛峰，亦与表末参合。

例2：测海岛的高

问：岛高及去表各几何?

答曰：岛高四里五十五步，去表一百二里一百五十步。

术曰：以表高乘表间为实，相多为法，除之，所得加表高，即得岛高。求前表去岛远近者，以前表却行乘表间为实，相多为法。除之，得岛去表数。

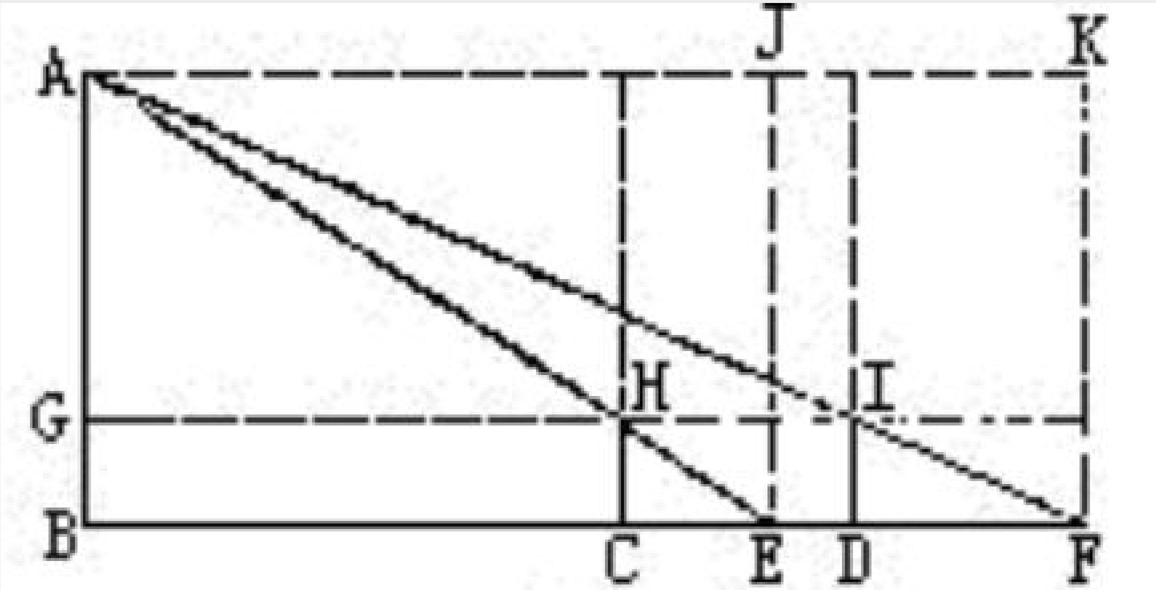


以立两表测海岛为例说明怎样以出入相补原理证明：

本题已知两表（即标杆）CH和DI，CH=DI=3丈

“表间”即两标杆之间的距离CD=1000步。CE=123步，DF=127步。

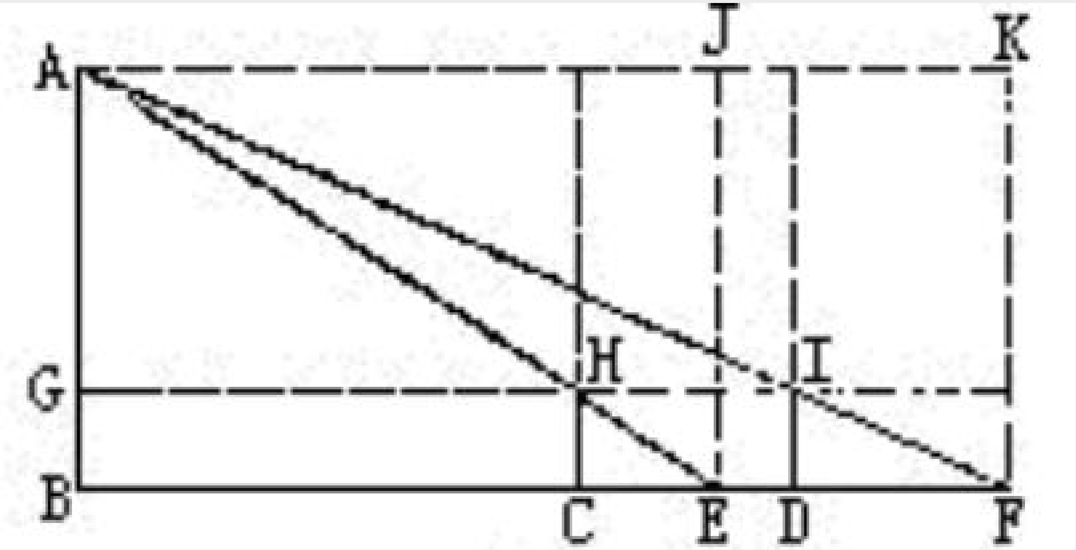
要求岛高AB和岛离杆的距离BC之长。古代1步=六尺，故杆高五尺。



由刘徽术文，得：

岛高AB$=\dfrac{表间\times表高}{相多}+表高=\dfrac{CD\times CH}{DF-CE}+CH=\dfrac{1000\times5}{127-123}=1255$（步）

去岛（岛离前杆的距离）BC$=\dfrac{表间\times前表却行}{相多}=\dfrac{CD\times CH}{DF-CE}=\dfrac{1000}{127-123}=30750$（步）



吴文俊先生认为证明方法如下：

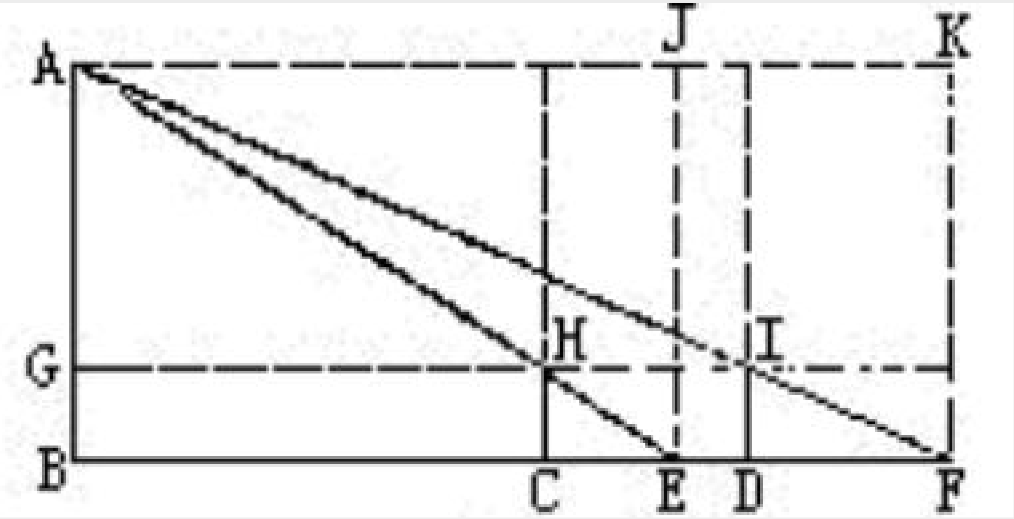
由于 □IK= □IB，□HJ= □HB，相减得 □IK- □HJ= □IC

由此可得：

后表却行×(岛高－表高)－前表却行×(岛高－表高) =表间×表高，

$$岛高=\frac{表间\times表高}{后表却行-前表却行}+表高$$

$$=\frac{表间\times表高}{相多}+表高$$



又从 □ HJ= □ HB得

前表却行×(岛高－表高) =前表去岛×表高，

代入岛高公式，即得“前表去岛”公式：去岛－ $\frac{\text{表间}\times\text{前表却行}}{\text{相多}}$

用到两表与岛的距离差，又用到后表却行与前表却行的距离差，这种测量方法叫“重差术”。

例3：勾股容方

勾股容方是古代中国数学中的一个命题。出自《九章算术》第九卷《勾股》章第十五题。

经刘徽论证，其后又经中国历代数学家研究和扩充为股中容直，勾中容横，由此产生一套具有中国传统数学特色的求解直角三角形几何学问题的方法，广泛用于在中国古代几何学和测量学。

例3：勾股容方

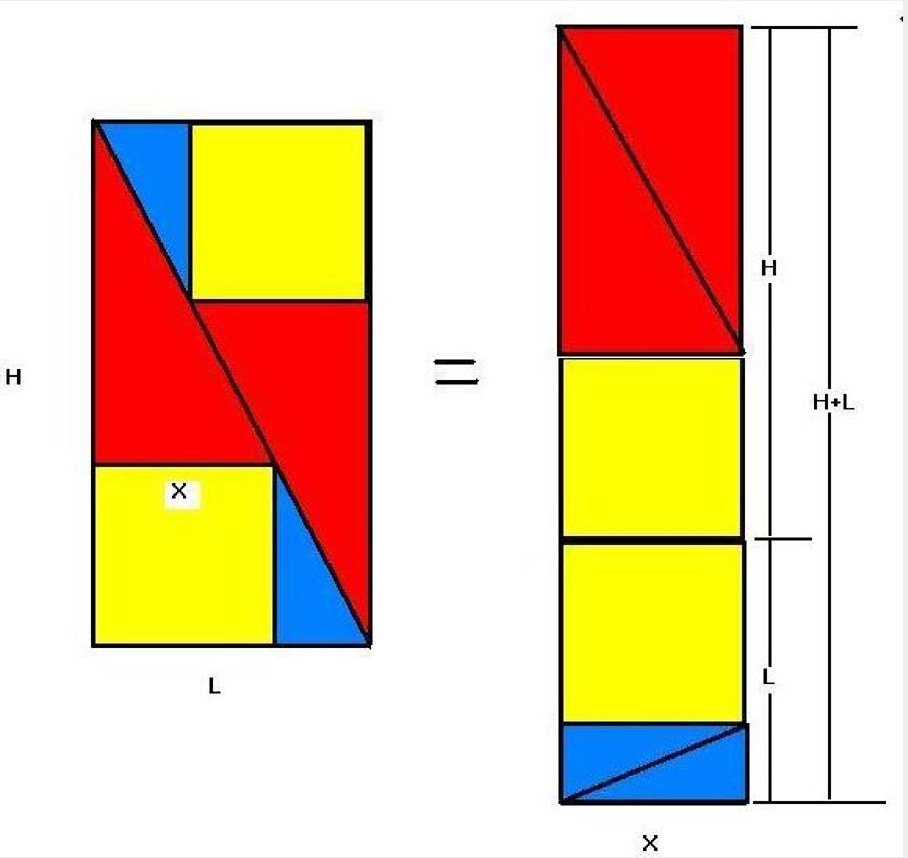
中国古代没有古希腊欧几里得几何学的平行线概念，采用容方、容横、容直概念，收到异曲同工的效用。

刘徽为勾股容方的关系式，提供了两个证明：

（一）利用出入相补原理：

左图面积=HL，右图面积=X(H+L)，左图的面积和右图的面积相等，由此得出勾股容方的关系式：

边长 X = HL / (H+L)



刘徽为勾股容方的关系式，提供了两个证明：

（二）利用相似三角形比率不变原理：

刘徽注曰：“幂图方在勾中，则方之两廉各自成小勾股，其相与之势，不失本率也”。

即三个相似三角形比率相同：

$$AD : DE : AE = EF : FC : EC = AB : BC : AC$$

令股高为H，勾长为L，勾股容方的边长为X，

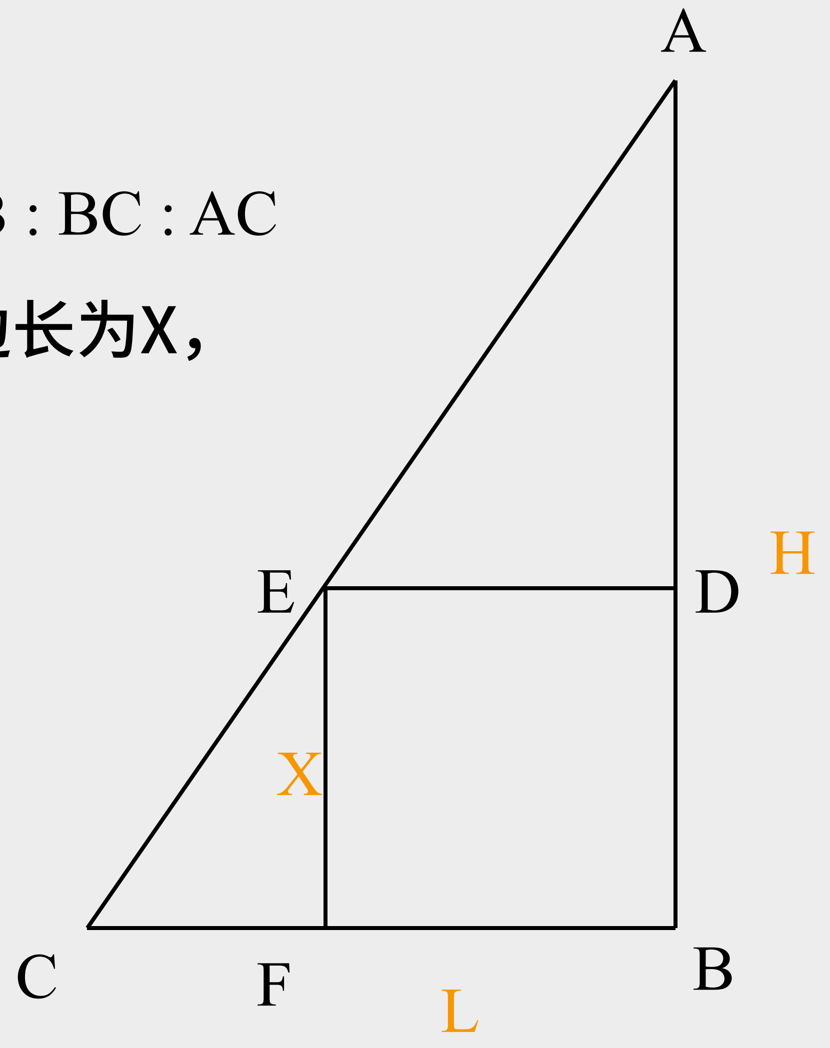
根据不失本率原理，

$$(H\text{-}X) : X = H : L$$

$$HL - XL = HX$$

$$HX + XL = HL$$

得勾股容方关系式：$X=HL/(H+L)$。



例4： “勾股容圆”

《九章算术》有“勾股容圆”问：

已知勾a、股b，求勾中容圆径d。

其公式是：$d=\dfrac{2ab}{(a+b+c)}$，

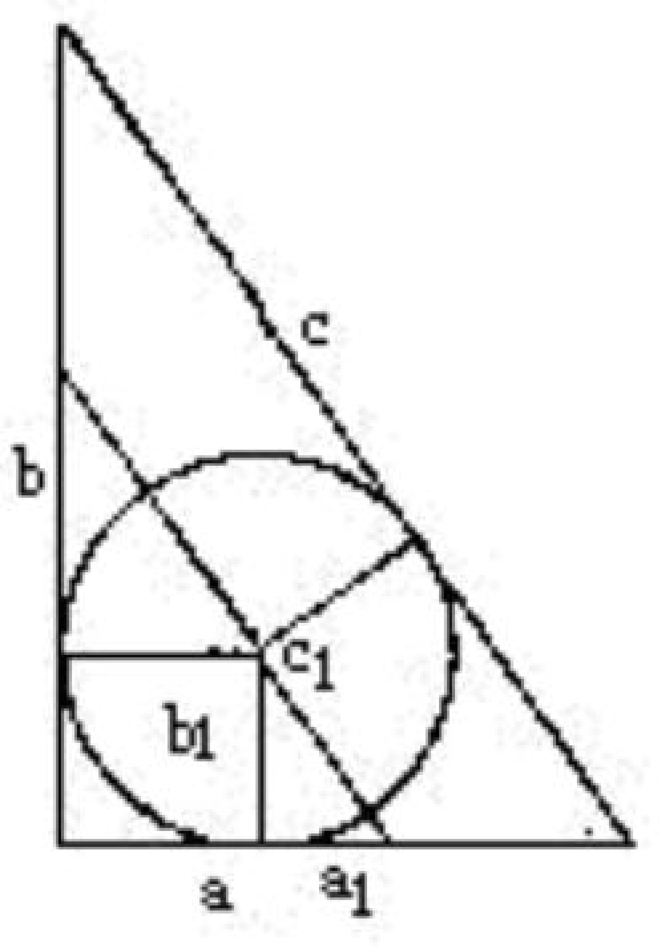
其中 $c=\sqrt{a^2+b^2}$

刘徽用衰分术证明了这个公式：

过圆心作平行于弦的直线，称为中弦，分别与垂直于勾、股的半径及勾、股形成与原勾股形相似的小勾股形，且其周长分别等于勾、股。设勾上小勾股形边长为a_1，b_1，c_1，则a_1：b_1：c_1＝a：b：c，且$a_1+b_1+c_1=a$。由“衰分术”

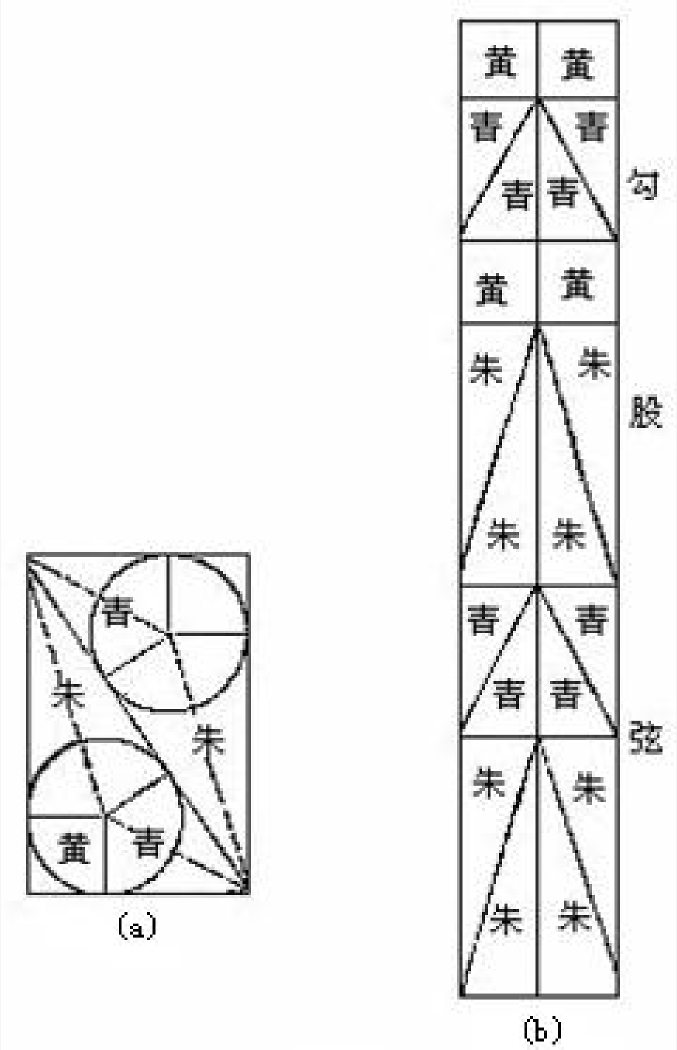
$$b_1 = \frac{ab}{(a+b+c)}, \quad d = 2b_1 = \frac{2ab}{(a+b+c)}$$

同样，由股上小勾股形亦可求出此公式。



对于勾股容圆，刘徽注的出入相补方法是：

“勾股相乘为图本体，朱、青、黄幂各二，倍之则为各四．可用画于小纸，分裁邪正之会，令颠倒相补，各以类合成修幂：圆径为广，并勾、股、弦为袤．故并勾、股、弦以为法”。



02

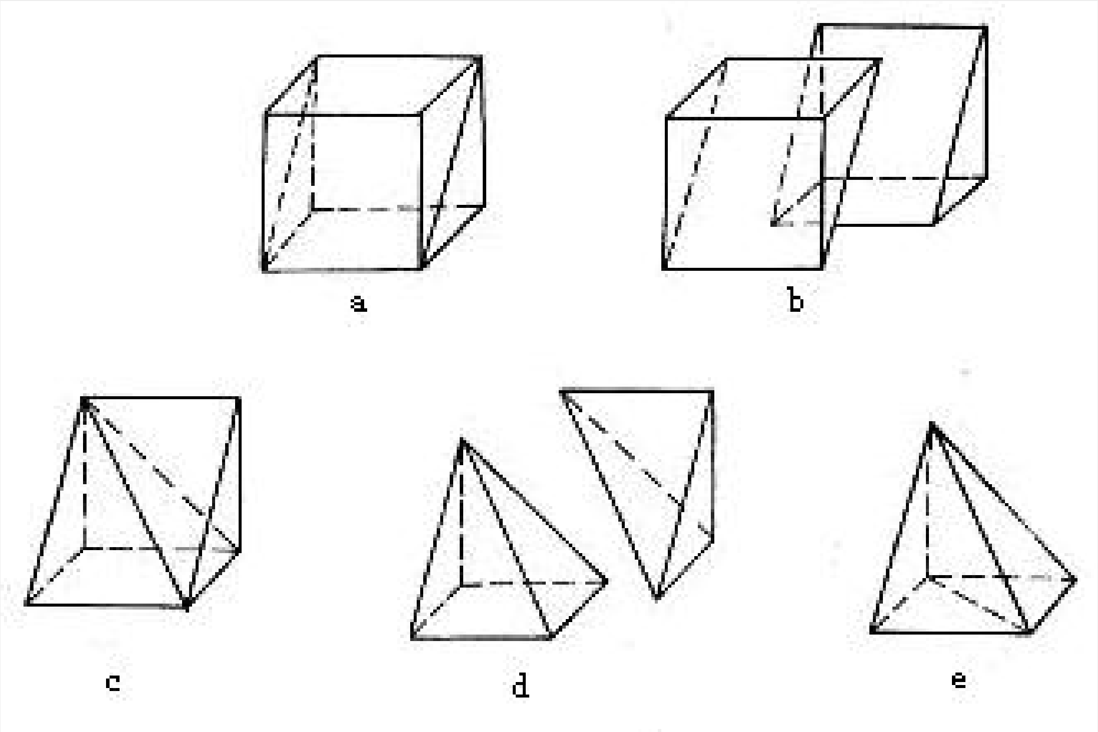
“刘徽原理”

刘徽在注释中把对于平面图形的出入相补原理推广应用到空间图形，成为“损广补狭”以证明几何体体积公式。

刘徽用无穷小分割和极限方法证明了一条极为重要的原理：

邪解堑堵，其一为阳马，一为鳖臑。阳马居二，鳖臑居一，不易之率也。（吴文俊称之为“刘徽原理”）

刘徽还用棋验法来推导比较复杂的几何体体积计算公式。刘徽说：“验之以棋，其形露矣。”



$V_{堑堵}=\frac{1}{2}abh$

$V_{阳}=\frac{1}{3}abh$，$V_{鳖}=\frac{1}{6}abh$

所以：$V_{阳}:V_{鳖}=2:1$

感谢聆听